第 40 講　複数の変数の取り扱い

40　次の各問いに答えよ．

(1)　点 $(x,\ y)$ が

$$x+4 \geqq 0,\quad x+y \leqq 6,\quad x+2y \geqq -4,\quad x-y \leqq 2$$

で表される領域内を動くとき，$f(x,\ y)=x^2-10x+4y$ の最小値を求めよ．

(2)　点 $(x,\ y,\ z)$ が

$$1 \leqq x \leqq 3,\quad 1 \leqq y \leqq 3,\quad 1 \leqq z \leqq 3,\quad x+y+z \leqq 6$$

で表される領域内を動くとき，$f(x,\ y,\ z)=xyz$ の最大値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第40講　複数の変数の取り扱い

40　α，β，γ は $\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$，$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ を満たすものとする．このとき，$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ の最大値を求めよ．

【選択肢】

㋐ $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$　㋑ $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　㋒ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 40 講　複数の変数の取り扱い

40 次の各問いに答えよ．

(1) 点 $(x,\ y)$ が

$$x+4\geqq 0,\quad x+y\leqq 6,\quad x+2y\geqq -4,\quad x-y\leqq 2$$

で表される領域内を動くとき，$f(x,\ y)=x^2-10x+4y$ の最小値を求めよ．

(2) 点 $(x,\ y,\ z)$ が

$$1\leqq x\leqq 3,\quad 1\leqq y\leqq 3,\quad 1\leqq z\leqq 3,\quad x+y+z\leqq 6$$

で表される領域内を動くとき，$f(x,\ y,\ z)=xyz$ の最大値を求めよ．

【答】 (1) -17（$x=3,\ y=1$ のとき）(2) 8（$x=y=z=2$ のとき）

【解答】

(1) $x+4\geqq 0$，$x+y\leqq 6$，$x+2y\geqq -4$，$x-y\leqq 2$ より，

$$-4\leqq x\leqq 0 \text{ のときは } -\frac{1}{2}x-2\leqq y\leqq -x+6,\quad 0<x\leqq 4 \text{ のときは } x-2\leqq y\leqq -x+6$$

と表せるので，$x=k$（定数）とおくと

(Ⅰ) $-4\leqq k\leqq 0$ のとき，$-\frac{1}{2}k-2\leqq y\leqq -k+6$ となり，$f(k,\ y)=k^2-10k+4y$ は y の１次関数であるので，y に関する最小値は

$$f\left(k,\ -\frac{1}{2}k-2\right)=k^2-10k+4\left(-\frac{1}{2}k-2\right)=(k-6)^2-44 \text{ となる．}$$

(Ⅱ) $0<k\leqq 4$ のときは $k-2\leqq y\leqq -k+6$ となり，$f(k,\ y)=k^2-10k+4y$ は y の１次関数であるので，y に関する最小値は

$$f(k,\ k-2)=k^2-10k+4(k-2)=(k-3)^2-17 \text{ となる．}$$

(Ⅰ), (Ⅱ)より，y に関する最小値は

$$\begin{cases}(k-6)^2-44 & (-4\leqq k\leqq 0 \text{ のとき})\\ (k-3)^2-17 & (0<k\leqq 4 \text{ のとき})\end{cases}$$

となるので，求める最小値は $k=3$ のとき -17 である．このとき $y=k-2=1$ であるので，$x=3,\ y=1$ のとき最小値 -17

(2) $z=k$（定数）とすると，与えられた４つの不等式は

$$1\leqq x\leqq 3\ \cdots①,\quad 1\leqq y\leqq 3\ \cdots②,\quad 1\leqq k\leqq 3\ \cdots③,\quad x+y+k\leqq 6\ \cdots④$$

となる．ここで，④は $y\leqq -x+6-k$ と変形でき，k の範囲③と②を考慮すると

(Ⅰ) $1\leqq k\leqq 2$ のとき，$x=l$（定数）とおくと

$$\begin{cases}1\leqq y\leqq 3 & (1\leqq l\leqq 3-k \text{ のとき})\\ 1\leqq y\leqq 6-k-l & (3-k<l\leqq 3 \text{ のとき})\end{cases}$$

となる．

このとき $f(l,y,k)=kly$ は１次の係数が正の y の１次関数であるので，その最大値 M_1 は

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$M_1=\begin{cases} f(l,\ 3,\ k)=3kl & (1\leqq l\leqq 3-k\ のとき) \\ f(l,\ 6-k-l,\ k)=k(6-k-l)l & (3-k<l\leqq 3\ のとき) \end{cases}$$

となる．

次に，M_1 の最大値を考えるとき，$3k$ は正で

$k(6-k-l)l=-k\left(l-\dfrac{6-k}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}k(6-k)^2$ であり，$3-k<\dfrac{6-k}{2}<3$ より，M_1 の

増減は

l	1	$\cdots$	$3-k$	$\cdots$	$\dfrac{6-k}{2}$	$\cdots$	3
M_1'		$+$		$+$	0	$-$	
M_1		↗		↗		↘	

となるので M_1 は $l=\dfrac{6-k}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{4}k(6-k)^2$ をとる．

(II)　$2<k\leqq 3$ のとき，$x=l$（定数）とおくと $1\leqq y\leqq 6-k-l$ となる．

このとき $1\leqq 6-k-l$ より $l\leqq 5-k$ であり，$f(l,\ y,\ k)=kly$ は１次の係数が正の y の１次関数であるので，その最大値 M_2 は

$$M_2=f(l,\ 6-k-l,\ k)=k(6-k-l)l$$
$$=-k\left(l-\frac{6-k}{2}\right)^2+\frac{1}{4}k(6-k)^2$$

となる．

このとき $1<\dfrac{6-k}{2}<5-k$ であるので，M_2 の最大値も(I)と同様 $\dfrac{1}{4}k(6-k)^2$ となる．

以上より $g(k)=\dfrac{1}{4}k(6-k)^2$ とおくと，$g(k)=\dfrac{1}{4}(k^3-12k^2+36k)$ より

$g'(k)=\dfrac{3}{4}(k-2)(k-6)$ となるので，$g(k)$ の増減は

k	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$g'(k)$		$+$		$-$	
$g(k)$		↗	$g(2)$	↘	

よって求める最大値は $g(2)=8$ であり，$k=2$ よりこのとき $x=y=z=2$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 40 講　複数の変数の取り扱い

40　α, β, γ は $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ を満たすものとする．このとき，$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ の最大値を求めよ． **【選択肢】** ㋐ $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$　㋑ $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　㋒ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【答】 ㋐

【解答】

$\gamma=\pi-\alpha-\beta$ よりこのとき，与えられた条件は $\alpha>0$, $\beta>0$, $\pi-\alpha-\beta>0$ であるから $\alpha>0$, $\beta>0$, $\beta<\pi-\alpha$ となる．ここで $\alpha=k$（定数）とすると $0<\beta<\pi-k$ $(0<k<\pi)$ であり，このとき

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma &= \sin\alpha\sin\beta\sin(\pi-\alpha-\beta)\\ &= \sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\\ &= \sin k\sin\beta\sin(k+\beta)\\ &= \frac{\sin k}{2}[\cos\{(k+\beta)-\beta\}-\cos\{(k+\beta)+\beta\}]\\ &= \frac{\sin k}{2}\{\cos k-\cos(2\beta+k)\} \quad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

ここで $0<\beta<\pi-k$ より $k<2\beta+k<2\pi-k$ となるので①は $2\beta+k=\pi$ すなわち $\beta=\dfrac{\pi-k}{2}$ のとき最大値

$$\frac{\sin k}{2}\{\cos k-\cos(2\beta+k)\}=\frac{\sin k}{2}(\cos k+1)=\frac{1}{2}\sqrt{(1-\cos k)(1+\cos k)^3} \quad \cdots\cdots ②$$

をとる．

ここで $t=1+\cos k$ とおくと $0<k<\pi$ より $0<t<2$ であり，$(1-\cos k)(1+\cos k)^3=(2-t)t^3=2t^3-t^4$ よりこの式を $g(t)$ とおくと $g'(t)=2t^2(3-2t)$ であるから $g(t)$ の増減は

t	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		↗		↘	

よって②の最大値は $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ となる．

このとき $\cos k=\dfrac{1}{2}$ より $k=\dfrac{\pi}{3}$ であり $\beta=\dfrac{\pi}{3}$ となるので $\gamma=\dfrac{\pi}{3}$

以上より求める最大値は $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{8}}$ $\left(\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}\text{ のとき}\right)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。